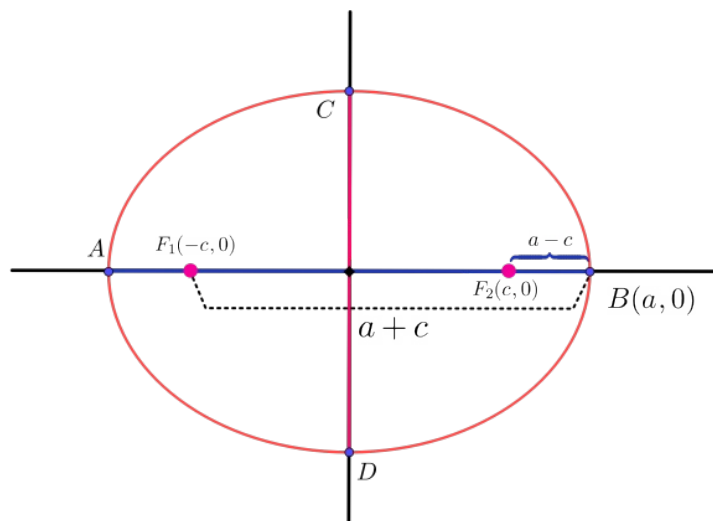


La elipse

La gráfica de una elipse tiene dos ejes de simetría. El eje más largo es llamado eje mayor; los focos de la elipse están sobre el eje mayor. El eje más corto es llamado eje menor. La longitud del eje mayor se denota por $2a$, mientras que la longitud del eje menor se denota por $2b$. El semieje mayor es la mitad del eje mayor y tiene una longitud de a y el semieje menor es la mitad del eje menor y tiene longitud b . El centro de la elipse es el punto medio del eje mayor. Los puntos extremos de los ejes son los vértices de la elipse.

Consideremos el punto $B(a, 0)$, sobre el eje OX , uno de los vértices de la elipse horizontal con centro en el origen de coordenadas. Consideremos los focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$. La distancia de F_1 a B es $a + c$, y la distancia de F_2 a B es $a - c$. Observa lo que decimos en la siguiente imagen.



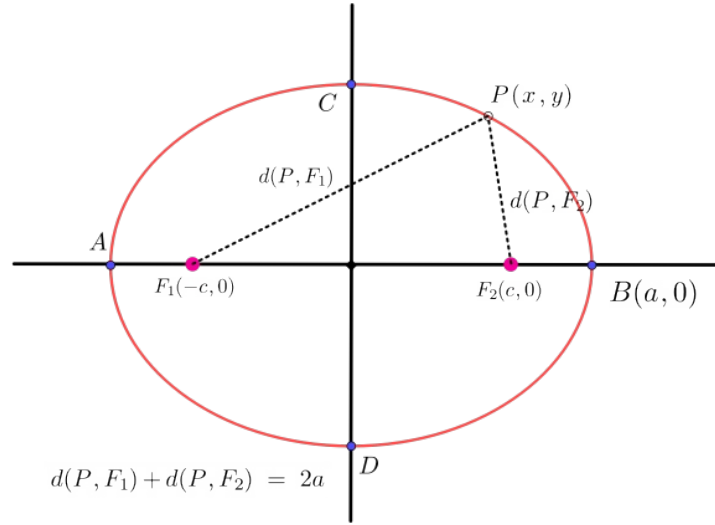
Según la definición de la elipse la suma de distancias desde cualquier punto hasta los focos ha de ser un número constante, según lo que hemos visto si sumamos las distancias desde el vértice B , hasta cada uno de los focos obtenemos:

$$d(B, F_1) + d(B, F_2) = (a + c) + (a - c) = 2a$$

Esta es la constante a la que se refiere la definición, que coincide con la longitud del eje mayor.

Ecuación de la elipse.

Para obtener una ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen considere la siguiente figura en donde $P(x, y)$ es un punto de la elipse. Utilizando la definición de elipse se tiene:



$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \\
 \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a
 \end{aligned}$$

Para simplificar esta ecuación trasladamos el segundo radical al segundo miembro y elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\
 (x + c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2
 \end{aligned}$$

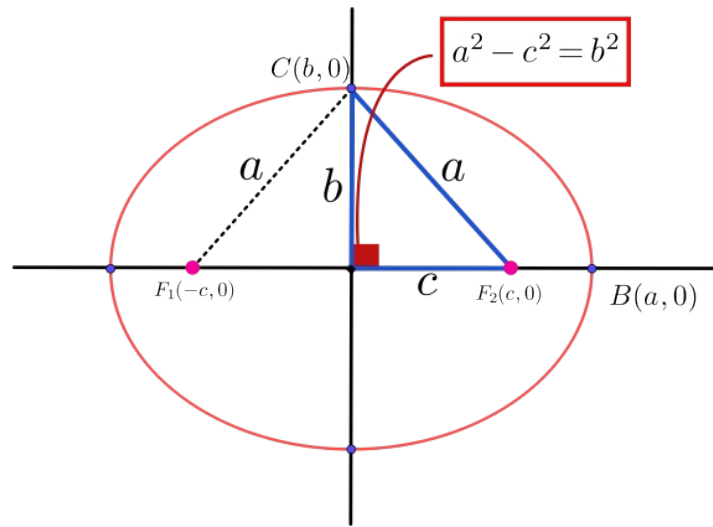
desarrollamos los binomios y reducimos términos semejantes y

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
 4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
 (cx - a^2)^2 &= \left(-a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right)^2 \\
 c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
 c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4
 \end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros por -1 y sacando factor común, obtenemos

$$\begin{aligned}
 a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

Veamos ahora detenidamente la expresión $(a^2 - c^2)$, observando la siguiente imagen.



entonces $a^2 - c^2 = b^2$, gracias al teorema de Pitágoras y al triángulo rectángulo que puedes ver en la figura anterior. Sustituimos y dividimos ambos miembros por a^2b^2

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

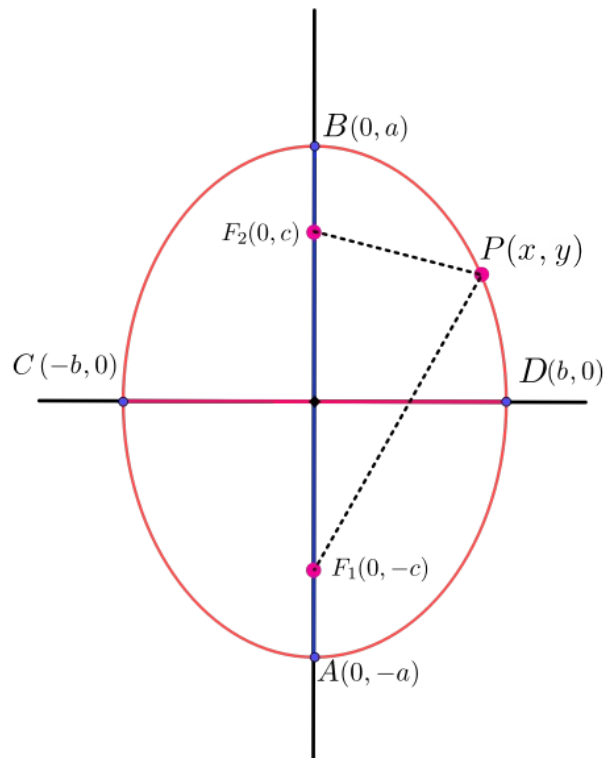
Esta es la ecuación estándar de una elipse horizontal con centro en el origen y donde $a > b$ y se verifica que $c^2 = a^2 - b^2$.

En esta elipse tenemos que:

Longitud eje mayor $= 2a$	Longitud eje menor $= 2b$
Centro: $C(0, 0)$	Vértices: $(-a, 0), (a, 0), (0, -b), (0, b)$
Focos: $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$	

Elipse vertical

Si la elipse tiene su eje mayor vertical, a lo largo del eje OY, con el centro también en el origen tendremos la siguiente situación:



En este caso para obtener la ecuación estandar solo tendríamos que proceder intercambiando x por y . El razonamiento es totalmente simétrico, con lo que al finalizar obtendríamos la ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

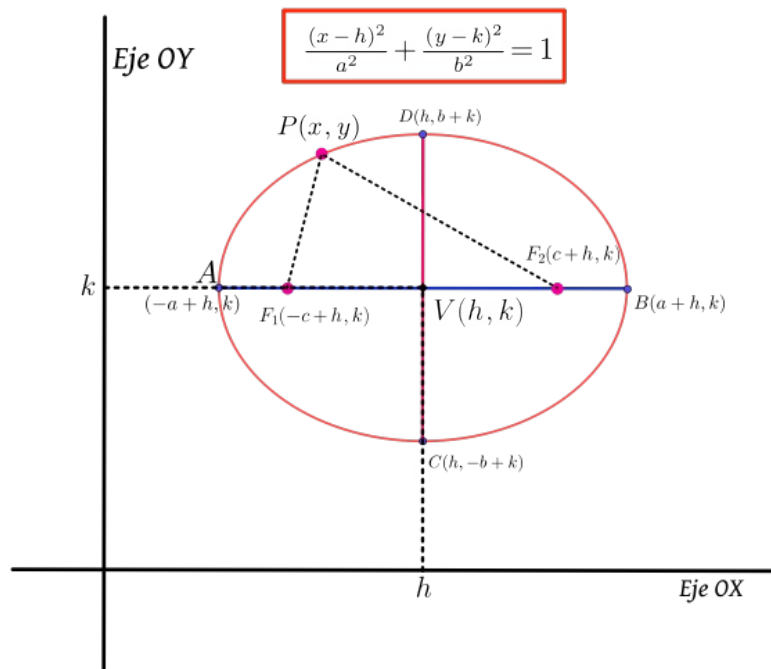
Como puedes observar el resultado final es intercambiar las variables x e y .

Elipses horizontales o verticales con centro en cualquier punto.

Si la elipse horizontal (o vertical) tiene su centro en cualquier punto del plano, su ecuación es prácticamente idéntica. Lo que hacemos es trasladar el origen de coordenadas al punto que ahora es el centro de tal forma que si el centro de nuestra elipse está en las coordenadas $V(h, k)$, restando h a la variable x y k a la variable y , al realizar los cálculos con esta traslación obtendremos la ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

En la imagen puedes observar como afecta el cambio del centro a los focos y los vértices.



De la misma forma si la elipse tiene centro $V(h, k)$ y el semieje mayor es vertical su ecuación será:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$